**2. melléklet:**

Az óra közvetlen előzménye:

A koszinusztétel két különböző bizonyítását beszéltük meg az előző órák egyikén. Utána a tétel alapvető alkalmazásait vettük sorra egyszerű feladatokon keresztül. Megoldottunk néhány, a gyakorlati élethez kapcsolódó szöveges feladatot is.

A tétel egyik bizonyítása, vektorok alkalmazásával:

|  |  |
| --- | --- |
| koszinusztétel biz |  |

A tétel másik megismert bizonyítása, Pitagorasz tételének alkalmazásával:

|  |  |
| --- | --- |
| koszinusztétel biz |  |
|  |  |
| koszinusztétel biz |  |

Derékszögű háromszögre is igaz, hiszen cosγ=cos90°=0 miatt a2=b2+c2, amely Pitagorasz tétele értelmében igaz.

**Ráhangolódás:**

I.) Előzetes házi feladat:

1., Egy paralelogramma két oldala 5 és 7, az általuk bezárt szög 60°. Számítsd ki a paralelogramma átlóinak hosszát! ()

2., Számítsd ki a paralelogramma átlóinak hosszát, ha két oldala 10 és 20, hegyesszöge pedig 45°. Pontos értékkel számolj! ()

A házi feladat ellenőrzése csoporton belül párokban történik.

A házi feladat példáiban számoljátok ki, az átlók négyzetösszegét, és hasonlítsátok össze a paralelogramma szomszédos oldalainak négyzetösszegével!  *illetve*  Fogalmazzátok meg, írjátok is le, hogy mit tapasztaltatok! A párok hasonlítsák össze, beszéljék meg a leírtakat! (*például: a vizsgált két esetben, a paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik a két szomszédos oldal négyzetösszegének kétszeresével*)

II.) Ismétlő kérdéseket kapnak, minden csoport ugyanazokat:

* definiáld két vektor skalárszorzatát!
* mondd ki Pitagorasz tételét és a tétel megfordítását!
* fogalmazd meg, mit értünk egy tétel megfordításán!
* mivel egyenlő egy vektor önmagával vett skalárszorzata?
* mikor használható a koszinusztétel?
* mit értünk két nem párhuzamos vektor összegén illetve különbségén?

A csoporton belül körben haladva mindenki feltesz egy kérdést, melyre a tőle balra ülőnek kell válaszolni. Ha nem tudja a választ, akkor a következő válaszol, majd folytatja a kérdezést. Ha elfogytak a kérdések, akkor ellenőrizzétek, hogy minden kérdésre tudja-e minden csoporttag a választ!

Nagycsoport szinten is sorra vesszük a kérdéseket. A válaszadót én választom ki.

*(Az új összefüggések elsajátításához a diákoknak szükségük van arra, hogy már meglévő ismeretekhez tudják azokat kötni. Ennek hiányában minden igyekezetünk ellenére sem érjük majd el célunkat.)*

**Jelentésteremtés:**

1.) Fogalmazzátok meg a feladat alapján a sejtéseteket, azaz a konkrét feladatban kapott eredményt általánosítsátok! (*A paralelogramma átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével. Bármely (vagy minden) paralelogrammában az átlók négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével*). Fogalmazzátok meg úgy is, hogy kihangsúlyozzátok a tétel feltételét és állítását! (Ha…….., akkor…….). (*Ha egy négyszög paralelogramma, akkor átlóinak négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével.*)

2.) Hogyan igazolható a sejtésetek? Keressetek több lehetőséget is a sejtés igazolására! Találjatok legalább három, elvileg különböző megoldást!

Először mindenki gondolja végig önállóan!

Utána a párok beszéljék meg egymással az ötleteiket!

Párcsere után az új párral is cserélj véleményt, hallgassátok meg egymás ötleteit!

Ha nem sikerül a három megoldást megtalálni, akkor egy küldöttet küldhettek valamelyik másik csoporthoz. Kész megoldást nem adhat segítségül egyik csoport sem, csak elindulási javaslattal, vagy kérdéssel segíthet.

Ha ez sem segít, akkor az eszközfelelős kérjen tanári segítséget! Ekkor a következő segítséget kaphatják, de minden csoport csak egyet:

1. Oldd meg a házi feladatot paraméteresen!
2. Az oldalak és az átlók irányításával vezess be vektorokat! Milyen összefüggés van köztük? () Fejezd ki az átlóvektorok négyzetét az oldalvektorokkal!
3. A paralelogramma magasságának megrajzolásával hozz létre olyan derékszögű háromszögeket, melynek átfogója e, illetve f. Az átlók négyzetét (az állítás egyik oldalán szereplőket) az ábrád alapján fejezd ki az oldalakkal (ezek szerepelnek az állítás másik oldalán)!

Legrosszabb esetben minden segítő kártya kiosztásra került. Mindegyik csoport legalább egy bizonyítást ki tud dolgozni. Írják le egy A4-es lapra, majd adják tovább a következő csoportnak, aki kiegészítheti, esetleg kérdést tehet fel. Minden csoport a saját színével dolgozik. A jegyző készítsen mindhárom megoldásról saját jegyzetet a csoport számára. Győződjetek meg arról, hogy a csoport minden tagja megértette a bizonyítások lépéseit (pl. párban dolgozva, felváltva magyarázzátok el egymásnak a jegyzet használata nélkül)

A bizonyítások:

1.

|  |  |
| --- | --- |
| 1 |  |
| 2. |  |
| 2 |  |
| 3. |  |
| 3 |  |

Mindhárom csoportból szólítom például a 2-es tanulót. A táblát három részre osztom. Egy-egy bizonyítást kell bemutatniuk.

3.) Fogalmazzátok meg a tétel megfordítását! (*ha egy konvex négyszög átlóinak* *négyzetösszege megegyezik az oldalak négyzetösszegével, akkor a négyszög paralelogramma)* (mivel a megfordítás nem igaz, de nehéz ellenpéldát találni, most nem kérem ennek vizsgálatát)

4.) A következő feladat megoldása során párokban dolgoznak csoporton belül. A feladat mindenkinek egyforma, csak a háromszög másik oldalával hajtják végre:

Tükrözz egy ABC háromszöget az AB (BC illetve AC) oldalának felezési pontjára középpontosan! A háromszög és képének egyesítésével milyen négyszöget kapsz? Alkalmazzátok az előző tételt a háromszög oldalaira, valamint az AB (BC illetve AC) oldalhoz tartozó súlyvonalra! Fejezzétek ki a háromszög súlyvonalát az oldalainak segítségével!

Következtess a másik két súlyvonal hosszára!

|  |  |
| --- | --- |
| hsz |  |

Hasonlítsátok össze a kapott eredményeteket!

5.) Mutasd meg, hogy a háromszög súlyvonalainak négyzetösszege az oldalak négyzetösszegének ¾-ével egyenlő! (*az előző feladat alapján a súlyvonalak négyzetösszegét felírva, könnyen adódik*)

*Szorgalmi feladat*, melyet a gyorsabban haladók órán is megoldhatnak, de otthon is foglalkozhatnak vele:

6.) Bizonyítsd be, hogy bármely négyszögben az átlók négyzetösszege a középvonalak négyzetösszegének kétszeresével egyenlő! (*Fel kell használni, hogy a konvex négyszög oldalfelező pontjai paralelogrammát határoznak meg*)

*házi feladat*:

1., Egy paralelogramma oldalai 6cm és 10cm, az egyik átlója 7cm. Számítsd ki a másik átló hosszát! Mekkora a paralelogramma magassága? Keress több megoldási módot! (*megoldható a feladat a koszinusztétel alkalmazásával, de megoldható az órán bizonyított tétel felhasználásával is*)

2., Egy háromszög oldalai 3cm, 5cm és 6cm. Számítsd ki a súlyvonalak hosszát! Oldd meg a feladatot többféleképpen is! (*Szintén lehetősége van koszinusztétellel előbb szöget, majd a szög ismeretében egy háromszög oldalaként kiszámítani a súlyvonal hosszát. Másik megoldást jelenthet a súlyvonal és az oldalalak közötti összefüggés felhasználása*)